897. D'Amore B. (2016). Prefazione. Preface. Prefacio. In: Iori M. (ed.) (2016). *La matematica e la sua didattica. Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 65 years of Bruno D'Amore*. Proceedings of International Conference, October 8, 2016. Department of Mathematics, University of Bologna. Preface of Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora. ISBN: 88-371-1927-5. Pagg. 1-45. http://www.dm.unibo.it/rsddm, http://www.incontriconlamatematica.org, http://www.incontriconlamatematica.net

Prefazione

Bruno D'Amore

Abstract. I take this opportunity to make a summary of some personal beliefs about mathematics education, such as research and practice, developed over the years.

Sono profondamente commosso e colpito dall'amicizia, dalla devozione, dalla simpatia dimostrata anche in questa occasione dai miei allievi, alcuni in modo particolare, che hanno voluto farmi questo regalo: chiamare a raccolta amici, colleghi, collaboratori, altri allievi per ricordare tutti insieme che cos'è la didattica della matematica, che importanza essa abbia, perché necessita di ricercatori seri, profondi e preparati; un inno a più voci dedicato a una delle discipline più belle del mondo e ad altre che le stanno bene accanto.
Approfitto allora di questa magnifica occasione internazionale, stupito dai nomi di tutti coloro che hanno voluto partecipare, con o senza un testo, per fare una specie di … confessione personale su alcuni punti che ritengo chiave per la didattica della matematica, sia come filone di ricerca, sia come prassi quotidiana di lavoro in aula (i miei due "pallini", che vedo ancora fortemente intrecciati). Auspico che su questi temi si possano ancora sviluppare ricerche in futuro.

Confessione a 70 anni

La storia

Mi sono laureato in matematica all'Università di Bologna all'età di 22 anni e ho deciso allora che nella mia vita non avrei potuto far altro che il matematico; e così ho cominciato subito a fare ricerca in questo campo, grazie a una borsa di studio del CNR trasformata poi in borsa del MIUR.

Alcuni anni dopo, quando mi è stata presentata la didattica della matematica (che ancora nemmeno si chiamava così) mi è sembrata un insieme di vaghe banalità senza capo né coda; ma poi, studiando prima Efraim Fischbein e poi Guy Brousseau, s'è aperto un mondo, l'ho vista subito come una matematica applicata con grandi potenzialità teoriche scientifiche che appena iniziavano a delinearsi. Nel frattempo ero diventato docente e fondai nel Dipartimento di Matematica di Bologna, in totale accordo con l'allora direttore, un NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica) non per convinzione, non per fare io stesso ricerca in didattica in prima persona, ma solo perché altri lo potessero fare: mi sembrava giusto dare spazio a questo genere di ricerche (non mi ricordo più bene, ma mi pare che in Italia esistessero già da poco due NRD). Io restavo un matematico, con tanta curiosità per questi studi nuovi, visti però come dall'esterno.

C'era parecchia confusione a quei tempi e pareva che, per capire la didattica, si dovesse studiare pedagogia; e così decisi di laurearmi in pedagogia sempre a Bologna (ebbi la fortuna di incontrare alcuni personaggi di alta levatura culturale); quattro anni e una tesi che venne subito pubblicata: forse era il mio primo contributo alla didattica della matematica.

Ero consapevole di essere profondamente ignorante in generale e nelle discussioni con il mio maestro di epistemologia Francesco Speranza (che per pochi mesi era stato anche mio docente di geometria) avevo sempre la peggio; inoltre capivo che nello studio della didattica bisogna essere ferrati non solo in epistemologia, ma anche in filosofia; e così decisi di laurearmi in filosofia sempre a Bologna (ebbi la fortuna di incontrare intelligenze davvero notevoli); quattro anni e una tesi che non ho mai voluto pubblicare.

Quasi senza accorgermene, ero entrato già da tempo nel mondo della ricerca in didattica della matematica, avevo lasciato la matematica (che però ho sempre amato e sento di poter amare per sempre) anche come insegnamento e non solo come ricerca. Nel frattempo avevo dato il via al convegno annuale *Incontri con la matematica*, oggi, nel 2016, all'edizione numero 30; e alla rivista *La matematica e la sua didattica*, prima edita dall'editore Armando Armando di Roma, poi da Pitagora di Bologna e oggi dall'associazione "Incontri con la Matematica".

Lo studio delle opere di Brousseau e di Duval (e l'amicizia immediata e profonda con questi straordinari pionieri) cambiò la mia vita e divenni un fanatico della didattica della matematica; l'ho praticamente vista nascere, l'ho seguita nelle sue evoluzioni, ho conosciuto e assiduamente frequentato i giganti che l'hanno creata passo dopo passo.

Nel 1996 fui Chief Organizer del Topic Group: *Infinite processes throughout the curriculum*, all'VIII ICME, Sevilla, 14-21 luglio 1996; Raymond Duval era, di fatto, l'unico *advisor*; lì le occasioni di incontro furono moltissime.
Studiavo come un folle e, più studiavo, più domande mi facevo. Fu allora che, per rispondere ad alcune di queste, decisi di prendere un PhD in *Mathematics Education*.
Ho fatto ricerche di carattere empirico che mi hanno sempre dato molta soddisfazione; e di carattere teorico; ho lavorato tanto con gli insegnanti in aula con gli studenti le mattine e nei pomeriggi senza studenti per capire bene quali siano i problemi che affliggono la scuola e il perché profondo del mancato apprendimento della matematica da parte di alcuni studenti.
Ho avuto allievi brillanti e capaci dei quali sono fiero e ho collaborato con cervelli di prim'ordine. Capisco appieno la famosa frase di Newton sulle *spalle dei giganti*, solo che io i giganti della didattica della matematica li ho conosciuti e frequentati di persona, e ancora oggi sono grato a tutti loro.

La mia visione

La mia visione della didattica della matematica è, come ho già detto, quella di una matematica applicata; ho convinzioni radicate che una volta sarebbero state normali ma che adesso sembrano superate; le elenco di seguito, lasciandole alla discussione dei miei allievi. In quel che segue, per taluni punti basta una breve battuta, per altri serve un più lungo e articolato discorso.

a) Per occuparsi di didattica della matematica, bisogna essere esperti in matematica.

b) Prima di parlare di didattica della matematica con gli insegnanti in servizio o con gli studenti in formazione come futuri insegnanti, bisogna essere certi che costoro capiscano i temi di matematica che costituiscono l'oggetto del discorso. Se così non è, occorre rimediare per non rendere vago e vuoto il discorso. Bisogna avere il coraggio di abbandonare subito il discorso sulla didattica per affrontare quello sulla matematica.

c) Per fare ricerca in didattica della matematica bisogna essere matematici. (Ho però tre esempi illustri contrari a quel che io stesso sto dichiarando, tre psicologi che, secondo me, hanno dato lustro alla didattica della matematica, tre cari amici: Efraim Fischbein, Gérard Vergnaud, Raymond Duval).

d) La didattica della matematica è una matematica applicata alla problematica dell'insegnamento-apprendimento, una vera e propria scienza; in essa sono già confluiti elementi in qualche modo acquisiti da altri campi del sapere umano, destrutturati dal loro mondo originario e adeguatamente ristrutturati, trasformati in saperi idonei al mondo della didattica della matematica.
I mondi di provenienza di tali saperi sono principalmente i seguenti (ma l'elenco non è esauriente):

- la storia della matematica,
- l’epistemologia della scienza e in particolare della matematica,
- la pedagogia,
- la didattica generale,
- la psicologia dell’apprendimento,
- la psicologia evolutiva,
- la teoria dei modelli,
- la filosofia,
- la linguistica,
- la semiotica,
- la sociologia

e altre.
A chi mi chiede come fare a diventare esperti in didattica della matematica, dichiaro che è inutile compiere il mio percorso di studi affannoso e dispersivo, perché tanto quel che serve di queste discipline è, oggi, già parte costituente della didattica della matematica.
Corollario concreto e polemico di questa lunga disquisizione: quando si suggerisce che la formazione di un docente di matematica consista di laurea in matematica seguita da un corso di pedagogia, si sta commettendo un errore mostruoso di ingenuità culturale; quel che professionalmente serve davvero, dopo la matematica, è la didattica della matematica che già ingloba quel che di pedagogia serve davvero.

e) Lo scopo della ricerca in didattica della matematica è quello di studiare situazioni d’aula (nelle quali l’oggetto Sapere è la matematica) e di creare strumenti per aumentare la qualità dell’apprendimento della matematica da parte degli studenti. Come fattore secondario: l’insegnante che, già esperto nella disciplina, studia con passione, entusiasmo e successo la didattica della matematica, sarà talmente padrone di entrambe che apporterà modifiche molto consistenti e radicali alla sua professione docente.
Tremo quando sento che c’è chi si aspetta che la didattica della matematica sia una sorta di “insegnare a insegnare”; è la cosa più stupida che si possa affermare o aspettarsi. Si può ragionevolmente pensare, come ho già detto, che un docente di matematica che conosca la didattica della matematica riveda tutta la sua professionalità docente e cambi radicalmente la sua forma di insegnare, le sue metodologie (al plurale), le scelte intrinseche alla trasposizione didattica, l’ingegneria didattica, i contenuti, le attese, la valutazione intesa in senso ampio (della sua stessa efficacia, delle scelte curricolari e del sapere/competenza dei suoi studenti).
Un insegnante che studia la didattica della matematica, come alcuni dei risultati della nostra ricerca hanno mostrato, cambia radicalmente le sue convinzioni sull’apprendimento, dunque sull’insegnamento, e perfino sulla matematica stessa e sul suo significato.

f) Il proliferare di un'enorme varietà di teorie in didattica della matematica in questi suoi 40 e poco più anni di vita è certo dovuto al fatto che ogni teoria affronta tematiche diverse, ha scopi specifici diversi, si occupa di aspetti diversi della ricerca; mai una teoria nuova esclude o scaccia una vecchia, a meno che non la inglobi, ma senza rifiutarla; una teoria nuova si affianca a una vecchia, perseguendo altri fini di ricerca.
Su questo tema voglio soffermarmi un po' più a lungo.
Il termine "teoria scientifica" o "scienza" è generalmente riservato a ogni rappresentazione (simbolica, astratta, scritta, …) condivisa, coerente e plausibile, di un insieme di fenomeni tra loro correlati da relazioni causali, descrivibili, significative (causa-effetto, deduzione, induzione, …).
Tralasciando per brevità il percorso arcaico dell'idea di scienza, nei modi attuali di considerare una teoria scientifica si trova la nozione di "paradigma" (Thomas Kuhn); si intende con "paradigma" l'insieme delle ipotesi teoriche generali e l'insieme delle leggi per le loro applicazioni, comunemente accettate dagli appartenenti a una stessa comunità scientifica, e implicanti un sostanziale accordo nei giudizi professionali, di merito e di pertinenza.
Nella formazione di una nuova comunità scientifica, c'è un momento a partire dal quale si può parlare appunto di "paradigma". La fase che precede è caratterizzata da una disorganizzazione, priva di accordi specifici, e con una costante richiesta di dibattito sui fondamenti della disciplina stessa: si può dire che in questa fase vi sono tante teorie quanti ricercatori e una continua richiesta ed esigenza di chiarire i punti di vista propri e altrui. I lavori scritti di ricerca nel campo sono spesso accompagnati da spiegazioni sui caratteri generali della ricerca stessa. La tesi di Kuhn più famosa è quella secondo la quale il progresso scientifico procede secondo "rivoluzioni", dato che si ha passaggio, evoluzione, solo dopo una crisi.
Un altro contributo fondamentale è quello proposto negli anni '60 da Imre Lakatos, con l'idea di "programma di ricerca", cioè una successione di teorie scientifiche collegate tra loro in uno sviluppo continuo, contenenti regole metodologiche di ricerca (sia in positivo, da seguire, sia in negativo, da evitare).
Ogni programma deve contenere:

- un nucleo o centro del programma;
- un sistema di ipotesi ausiliarie;
- una euristica, cioè i procedimenti che si applicano alla risoluzione dei problemi.

In questa successione, una nuova teoria si può allora considerare un progresso rispetto a una precedente se:

- fa predizioni che la precedente non era in grado di fare;
- alcune di tali predizioni si possono provare come vere;
- la nuova teoria spiega fatti che la precedente non poteva provare.

Un altro notevole contributo teorico è quello dovuto a Mario Bunge, negli anni '80: la scienza è un corpo in costante accrescimento di conoscenze, caratterizzato dal fatto di trattare di conoscenze razionali, sistematiche, esatte, verificabili (e dunque anche fallibili). La conoscenza scientifica coincide con l'insieme delle idee su un certo argomento, stabilite in modo momentaneamente provvisorio; ma poi, il concorso dei singoli e lo scambio di informazioni e di idee dà luogo a una comunità scientifica. Quel che caratterizza la differenza tra campi di credenza (religioni, ideologie, politiche,...) e campi di ricerca scientifica è il tipo di modalità secondo le quali avvengono i "cambi" nelle idee; nei primi, i cambi avvengono a causa di "rivelazioni", controversie, pressioni sociali; nei secondi c'è un cambio continuo a causa degli stessi risultati della ricerca.
Secondo richieste più "deboli", una teoria scientifica si definisce oggi tale quando dispone di un oggetto specifico di studio, di un suo proprio metodo di ricerca e di un suo specifico linguaggio condiviso; a questa richiesta fanno spesso riferimento i teorici delle scienze umane, per chiamare "scienze" appunto, tali domini di studio.
Questa richiesta "debole" ha fatto proliferare negli ultimi anni l'appellativo di "scienze" dato a molte discipline. Infatti, qualsiasi disciplina allo sviluppo della quale concorrano studiosi che si riconoscano e si accettino reciprocamente come esperti in essa, fondando una comunità di pratiche condivise, che facciano uso dello stesso linguaggio, prima o poi acquisisce proprio le caratteristiche appena descritte. Il problema della ripetibilità degli esperimenti, della corretta definizione delle variabili in gioco, del senso che acquistano termini come "rigoroso", "vero" ecc., tende a svanire o a subire profonde modifiche.
Quel che c'è di comune in tutte queste interpretazioni è che le teorie scientifiche non possono essere creazioni o invenzioni di un singolo, ma deve esserci una comunità di persone tra le quali vige un sostanziale accordo sia sui problemi significativi della ricerca, sia sulle modalità nelle quali essa si esplica, sia sul linguaggio usato.
In questa direzione, Thomas A. Romberg, alla fine degli anni '80, definiva le caratteristiche peculiari di una teoria scientifica consolidata e stabile affermando che:

- deve esistere un insieme di ricercatori che dimostrino interessi in comune; in altre parole ci devono essere problematiche centrali che guidano il lavoro dei ricercatori e che siano condivise;
- le spiegazioni date dai ricercatori devono essere di tipo causale;
- il gruppo dei ricercatori deve aver elaborato un vocabolario e una sintassi comune, sulla quale il gruppo è d'accordo;
- il gruppo deve aver elaborato procedimenti propri per accettare o refutare gli enunciati in un modo considerato da tutti oggettivo e largamente condivisibile.

Tra le scienze così intese, ben rientrano le didattiche disciplinari e dunque, in particolare, la didattica della matematica; è sotto gli occhi di tutti, infatti:

- l'esistenza di un folto gruppo internazionale di ricercatori nelle varie didattiche disciplinari che hanno interessi comuni,
- per i quali esistono problematiche considerate centrali e condivise,
- che danno (da alcuni decenni) spiegazioni di carattere causale,
- che hanno elaborato un vocabolario comune, condiviso;
- essi hanno convegni specifici e loro riviste specifiche, all'interno dei quali le proposte di comunicazione o di pubblicazione vengono vagliate in base a procedimenti oramai ampiamente condivisi.

Siamo dunque in pieno nelle condizioni proposte da Romberg per poter affermare che la didattica della matematica ha tutte le caratteristiche per poter essere considerata scienza consolidata e stabile.
L'amico – collega – più volte coautore Luis Radford propone che una teoria sia vista come:

> un modo di produrre interpretazioni e modi di azioni basati su:
> un sistema, P, di *principi fondamentali*, che includa visioni implicite e affermazioni esplicite che delineano i confini dell'universo del discorso e della prospettiva di ricerca adottata;
> una *metodologia*, M, che includa tecniche di raccolta dati e di interpretazione dei dati, sostenuti da P;
> un insieme, D, di *domande di ricerca* paradigmatiche (modelli o schemi che generano domande specifiche quando si presentano nuove interpretazioni o quando si approfondiscono, ampliano o modificano i principi).

Ancora una volta, la didattica della matematica calza a pennello con questo tipo di richiesta-definizione.

g) Io non sono, in nessun caso, favorevole alla drastica lotta fratricida fra teorie in didattica della matematica; sono invece a favore della cosiddetta unificazione delle teorie, in più d'una delle modalità nelle quali questa unificazione può darsi. Io stesso ho molto lavorato e prodotto in questa direzione.

Favorire e usare più metodologie di insegnamento, se si vuol produrre apprendimento

Prendo in considerazione una frase di Immanuel Kant che, parafrasando e riassumendo, suona più o meno come segue: così come un liquido assume la forma del contenitore che lo contiene, il concetto assume la caratteristica di chi se lo sta costruendo. Dunque il concetto viene decostruito nella sua apparente obiettività e viene ricostruito adattandolo alla singola persona.
La ricerca in didattica della matematica ha confermato che vale anche per l'insegnamento-apprendimento della matematica quanto segue: a fronte di un

emittente e di una emissione (messaggio), ogni essere umano è costretto dalla sua stessa natura umana a interpretare tale messaggio; cioè il ricevente non riceve in realtà il messaggio dell'emittente, ma lo trasforma, lo personalizza, lo interpreta. Detto in altre parole: ognuno impara a modo suo, sulla base della sua personalità, della sua esperienza, della sua cultura. Cioè, se in aula ci sono vari studenti, il loro apprendimento non sarà univoco, non sarà banalmente coincidente con quel che l'insegnante ha detto o ha fatto fare, ma ogni apprendimento personale sarà il risultato di un'interpretazione del messaggio iniziale. (Naturalmente sappiamo bene che ci sono varie posizioni più o meno "forti" al riguardo, da alcune molto radicali ad altre più deboli).
Dunque, l'idea di un insegnamento univoco, dell'uso di una sola metodologia di insegnamento, con un metodo pre-confezionato, è già in sé stessa un errore didattico; non si può neppure pensare di proporre UN metodo in aula. Il solo pensarlo è già l'anticamera di un sicuro insuccesso apprenditivo. L'insegnante dovrà usare più metodologie, più strumenti, più metodi, nella speranza di "raggiungere", con ciascuno di essi, qualche studente; se poi parecchi studenti riceveranno messaggi "diversi" basati su metodologie diverse, meglio, apprenderanno da più punti di vista e di conseguenza il transfer cognitivo sarà facilitato e la costruzione cognitiva dell'oggetto matematico sarà più completa.
Sarebbe opportuno scientificamente ed eticamente che *tutti* coloro che hanno ideato, che pensano di aver ideato, un metodo o uno strumento o una metodologia didattica, la sottoponessero al severo e serio giudizio scientifico, o la proponessero su riviste scientifiche con referee, o partecipassero a convegni di ricerca o anche solo convegni cui partecipano colleghi critici.
In quest'ambito, in passato era normale creare "materiali strutturati" (cioè specifici e specificamente predisposti: chi non ricorda questa dizione?) per proporre didattiche univoche; ricordo solo due esempi che hanno avuto successo planetario, i blocchi logici (e altro) dell'ungherese Zoltan Paul Dienes e i papygrammi (e le frecce e il minicomputer) del belga Georges Papy; entrambi hanno dominato il mondo dell'insegnamento matematico proponendo strumenti univoci per l'insegnamento-apprendimento della matematica. Si trattava di due veri matematici, il primo con dottorato a Londra, il secondo a Bruxelles, non dilettanti improvvisati; ho avuto l'occasione di conoscerli personalmente entrambi e di frequentarli anche in modo privato.
Gli studi analitici e critici di Guy Brousseau, il creatore della moderna didattica della matematica, hanno stroncato negli anni '80 i lavori didattici di Dienes, mostrando in forma assolutamente evidente un deleterio "effetto Dienes" che lo stesso riconobbe pubblicamente (a Forlì, l'8 maggio 1993, in mia presenza). Mentre la critica demolitrice degli strumenti ideati da Papy avvenne all'interno dello stesso gruppo che lui aveva creato (il GIRP, *Groupe International de Recherche en Pédagogie de la Mathématique*, con sede a Walferdanche, Lussemburgo, del quale sono stato presidente per 3 anni).

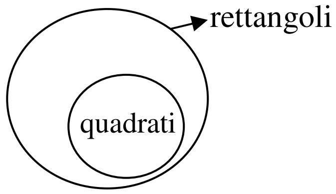
Oggi nessuno parla più di quei metodi, eppure hanno illuso il mondo, all'interno di quella trappola che si chiamò "nuova matematica" o "matematica moderna".
Non si può essere contrari a uno strumento o a un metodo in via di principio; anzi, magari ci fossero mille strumenti e mille metodi a disposizione degli insegnanti! Quello a cui ci si deve opporre non è uno strumento o un metodo, l'errore è la scelta univoca o l'affidare allo strumento (al singolare) o al metodo (al singolare) un potere taumaturgico-didattico che esso non può avere, perché questo spetta solo al docente, al maestro, all'essere umano che insegna e non a uno strumento o a un metodo. Il delicatissimo e complicatissimo processo di insegnamento-apprendimento è connesso agli aspetti relazionali che legano i tre elementi della situazione d'aula: docente, allievo e Sapere (matematico).
I numeri in colore (le reglettes) di Cuisenaire-Gattegno, i BAM di Dienes, le frecce di Papy, la retta numerica, i blocchi logici di Dienes, gli abaci, i soroban, le calcolatrici, le LIM, ogni TIC, ogni software didattico, ben vengano, più strumenti sono disponibili e maggiore è la possibilità di scelta da parte del docente. Più strategie didattiche questi conosce e meglio è, ne potrà così applicare diverse.
Quel che è ridicolo antididattico sbagliato è il credere che sia possibile una scelta univoca, che in uno solo di questi (o di altri analoghi) sia nascosta la ricetta, la magia, la panacea.
Bisogna usare, saper usare, ciascuno strumento, ciascuna metodologia, e allo stesso tempo diffidarne, conoscerne i limiti, perché questi ci sono sempre, in ogni strumento.
Le rivelazioni mistiche magiche dei creatori di teorie didattiche infallibili appartengono alla categoria di credenze che, nel punto f, ho chiamato "campi di credenza". Sono più vicine all'astrologia che alla scienza o alla didattica anche solo pensata come scienza empirica.

Un esempio di analisi delle situazioni d'aula

Guy Brousseau e io abbiamo studiato alcuni anni fa tanti esempi e denunciato per iscritto il fenomeno dello "scivolamento metadidattico". Questi fenomeni appaiono a seguito di una sconfitta, di un insuccesso, generalmente inevitabile; ma il fatto non è riconosciuto immediatamente come tale nella didattica ingenua.
Gli insegnanti spiegano, poi spiegano le spiegazioni, le illustrano e poi spiegano le illustrazioni… Ogni volta i tentativi di correggere l'insuccesso apprenditivo iniziale si rivelano inappropriati. Il fenomeno si amplifica e diventa rapidamente incontrollabile. E così, come nelle grandi pandemie del Medioevo, alcuni ne approfittano per accusare ogni sorta di pratiche scolari

che essi pretendono di rinnovare, mutilandole, per mettere al rogo qualche "teoria" e per dimenticare i risultati delle esperienze considerate nefaste.
Facciamo un esempio concreto. Alla fine degli anni '50, la riorganizzazione delle conoscenze matematiche stava concludendo un centinaio d'anni di scoperte notevoli. La società, i centri culturali e l'insegnamento riconobbero la necessità di adattarvisi. Ma la maggiore difficoltà risiedeva nell'introduzione dei fondamenti: come addomesticare l'assiomatica in un insegnamento abituato ad associare degli oggetti ai suoi linguaggi? Tutti gli aspetti della matematica hanno bisogno della logica sotto una forma appropriata. Venne proposto allora di usare una teoria ingenua degli insiemi come sostituto della logica classica e di sostituire la matematica a scuola con tale teoria. *Si tratta di un primo scivolamento didattico*: lo strumento diventa esso stesso l'oggetto di studio.
Per usare più facilmente la logica, le si sostituisce una specie di descrizione o di modello. In realtà si semplifica molto: basta dare delle regole d'uso. Si pensa alla teoria degli insiemi, ma in realtà si introducono grafici, il linguaggio stesso degli insiemi è reso più "concreto" facendo appello a una idea di Leonhard Euler che usava dei cerchi per illustrare, enumerare e classificare i sillogismi per una propria nobile allieva. Sembrò all'epoca che questa idea avrebbe permesso di rendere molto più facile l'insegnamento della logica di Aristotele e il fondamento di tutto il linguaggio matematico, anche a bambini molto giovani, così i termini sarebbero stati gli stessi, dalla Scuola dell'Infanzia all'Università. *Si tratta di un secondo scivolamento didattico*: dallo studio della logica si passa allo studio dello strumento grafico che in realtà dovrebbe costituire solo una rappresentazione.
Ma questa volta la "rappresentazione" non è di fatto che una metafora: gli insiemi non hanno delle frontiere, mentre il loro disegno sì; l'unione di parti non sono più visibili come "insieme" etc. Tuttavia, anche nell'insegnamento bisogna coniugare delle nozioni abbastanza ben definite con delle altre che non sono altro se non approcci "trasposti": le regole del gioco sono diverse, soprattutto ai livelli inferiori nei quali occorrono delle regole d'uso ben *formulabili* e *consistenti*.
La lingua colloquiale messa in moto per la descrizione della metafora dei cerchi di Eulero costituisce un *nuovo scivolamento meta*: dallo studiare lo strumento grafico si passa al linguaggio comune che lo descrive. Georges Papy propose al tempo di colorare le frontiere di tali cerchi per identificare le componenti connesse di uno stesso insieme. Ma la materializzazione degli elementi attraverso dei punti solleva nuove contraddizioni.

Non si sa se il segno 2, rappresentato in un cerchio, ne è l'unico elemento, o se è una specie di variabile, un elemento identificato a titolo di esempio che ne evoca altri, per esempio tutti i pari, non rappresentati, o se l'elemento è lo stesso segno "2".
Ci vuole anche un vocabolario specifico per descrivere queste figure. In lingua francese, sotto la spinta di Gorges Papy, si chiamarono dapprima "patate" e poi "papygrammi"; in italiano non assunsero denominazioni specifiche nelle aule, solo "diagrammi degli insiemi" o "diagrammi di Eulero-Venn" e la disciplina relativa si chiamò "insiemistica". Questo nuovo vocabolario si può considerare come l'elemento costitutivo di questo ultimo e definitivo scivolamento: la matematica iniziale si è persa, non è più chiaro che cosa si sta insegnando e che cosa si sta chiedendo di apprendere.
Se si volesse accettare la metafora insiemistica, per evitare d'un sol colpo gli scivolamenti successivi, si sarebbe dovuto restringere i disegni a un ruolo di pura illustrazione, di mezzo d'espressione senza codificarli né insegnare delle regole grafiche e linguistiche a loro proposito. Essi avrebbero formato un insieme di conoscenze implicite per rappresentare ciò di cui si parla, per convincersene, e che può essere utilizzato; ma senza la necessità di uno statuto di sapere significativo, comprovante, dunque senza grammatica e senza teoria. Ciò che noi chiamiamo una conoscenza, ma non un sapere.
In altre parole, si può usare un grafico come il seguente:



per illustrare che "Tutti i quadrati sono rettangoli, ma ci sono rettangoli che non sono quadrati", senza dover trattare in modo specifico una teoria degli insiemi che comprenda: insiemi, proprietà, elementi, appartenenza, insieme vuoto, insieme universale, inclusione, intersezione, unione, sottoinsieme, inclusione, prodotto cartesiano, corrispondenza biunivoca, relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, passaggi al quoziente eccetera, tutto inutilmente sovradimensionato per giungere a un banale uso di alcuni grafici che già sono del tutto comprensibili.
Gli scivolamenti metadidattici possono prodursi a proposito di qualsiasi nozione matematica, ma anche azione matematica.

Per esempio, consideriamo lo pseudo insegnamento dei metodi di *problem solving*.
Le difficoltà che incontrano gli allievi nella risoluzione dei problemi lasciano spesso gli insegnanti disarmati. L'allievo sa i "suoi" saperi, i "suoi" teoremi (talvolta solo "in atto") e tuttavia egli non trova il mezzo di usarli per risolvere i problemi che gli sono posti. Una risposta classica al livello primario consiste nel presentare allo studente che ha fallito problemi analoghi in modo che l'allievo possa riprodurre la soluzione che gli si è insegnata in un caso simile, capendo la similitudine ma non il senso della risoluzione.
Egli non ha bisogno di sapere se la sua risposta è adeguata, né perché; basta che essa sia conforme al modello atteso come risposta dall'insegnante. Egli può così rispondere nell'àmbito di un contratto didattico senza comprendere perché la sua soluzione è corretta. Qualsiasi cosa dicano a questo proposito le varie teorie della conoscenza e dell'apprendimento che sono fondate sul "riconoscimento" del sapere e sulla sua citazione, lo studente simula una risoluzione che può non comprendere.
In un percorso più concreto, per guidare gli allievi, George Polya si prodiga in consigli neo cartesiani per l'organizzazione del lavoro di risoluzione dei problemi, assumendo sé stesso come paradigma: comprendere l'enunciato, connetterlo con conoscenze previe, decomporlo in tappe,… Egli suggerisce così di tentare dei passi più euristici: cercare delle similitudini, un esempio, un controesempio, generalizzare, comparare, paragonare … Questo lavoro, che voleva essere puramente descrittivo, è servito di base a un fallimentare e ingenuo tentativo di insegnamento della risoluzione di problemi fondato sull'uso di queste euristiche. Si tratta chiaramente di uno scivolamento metadidattico: la risoluzione di problemi si vede sostituita da uno studio di procedure di tali risoluzioni. Se è probabile che gli esempi dati sono di natura tale da rassicurare e da rendere agguerriti gli allievi, è chiaro che la situazione è scivolata senza cambiare di natura: l'allievo cerca di applicare le sue euristiche così come cercava di applicare le sue conoscenze e i suoi teoremi e il successo non è affatto più assicurato, a meno di scegliere dei problemi ad hoc. Bisogna allora cercare delle euristiche di secondo ordine? Anche se il processo non è ricorsivo, l'inganno è fatale. La sola differenza è che i teoremi sono dei saperi matematici che contengono le loro stesse condizioni di validità, il che non è il caso delle euristiche che sono solo delle conoscenze. Il trattarle come dei saperi è un errore epistemologico e didattico.
Ancora più mortale il sogno, prosecuzione acritica di questo scivolamento metadidattico, di trasformare la risoluzione dei problemi in algoritmi; ce ne sono di due tipi.
1. Invece di risolvere il problema, costruire il diagramma a blocchi o di flusso che lo illustra; questa scelta idiota portò a studiare i diagrammi a blocchi e di flusso come se fossero questi l'oggetto di apprendimento; uno scivolamento metadidattico fallimentare.

2. Sistemi normativi di effetto nullo o negativo: "Cerchia di rosso i dati numerici del testo del problema; sottolinea di color verde la domanda; cerca la parola chiave che ti permette di riconoscere l'operazione che devi usare per risolvere il problema...".
Tutte queste sono condizioni di scivolamento metadidattico che trasformano la risoluzione del problema in banalità che non aiutano in nessun modo l'attività di risoluzione dei problemi. Si prenda a mo' di esempio il mio esempio del 1992: "Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?"; si cerchino pure in rosso i dati 12 e 6; si sottolinei pure in verde la domanda: "Quanti anni ha il pastore?"; si cerchi anche la parolina chiave che aiuta a decidere l'operazione … Già, ma quale? "Quanti?", "e"? Il risolutore che davvero segue queste "regole" è condannato a fornire la risposta "18" che caratterizza la stragrande maggioranza delle risposte a questo problema proposto oralmente. Lo studente non legge più criticamente il testo del problema per dargli una risoluzione ragionevole, viene stordito dallo scivolamento metadidattico imposto, effettua i passi suggeriti e poi dimentica la logica del testo e spara proposte numeriche che gli sembrano congrue, di fatto quelle obbligate dalla procedura demenziale suggerita.
Lo *scivolamento metadidattico* consiste dunque per l'insegnante nello spostare l'oggetto del suo insegnamento da un'attività o da una nozione, su uno dei suoi mezzi di controllo. Per esempio, l'insegnante di lingua sostituisce la correzione di un errore degli allievi con l'insegnamento dell'enunciato della regola di grammatica che è stata violata. Questa azione è perfettamente legittima, in via di principio; ma la percezione di questo atteggiamento docente da parte dello studente è come un allontanamento dalla circostanza specifica, una generalizzazione del suo errore concreto.
Tutto ciò può talvolta costituire un dirottamento di attività assai dannoso; i personaggi coinvolti nell'insegnamento-apprendimento, insegnante e allievo, perdono di vista (entrambi) il loro progetto e si smarriscono. Per esempio:

- invece di studiare la proporzionalità, si studia la regola (una volta si chiamava "la regola del tre") da seguire per rispondere a una domanda sulla proporzione;
- invece di capire le condizioni interne intrinseche di una sistema di due equazioni lineari, si studia il metodo di Cramer;
- invece di studiare la logica degli enunciati, si imparano a memoria le tavole di verità semantiche dei connettivi;
- invece di studiare che cos'è una superficie, si danno le regole per calcolare l'area di un quadrilatero;
- invece di studiare e apprendere il teorema di Ruffini, si impara la regola di Ruffini;
- i test nazionali e internazionali, da mezzo di controllo dei risultati dell'apprendimento, sono prima diventati degli obiettivi di insegnamento, poi dei mezzi di insegnamento e infine l'oggetto stesso dell'insegnamento;

essi tendono a trasformare le nostre concezioni di conoscenza e apprendimento a una sorta di esercitazione;

eccetera.

Si tratta sempre evidentemente di scivolamenti metadidattici, estremamente potenti e pericolosi.

Riferimenti bibliografici

"Pensino ora i miei venticinque lettori" (25?; magari, caro Alessandro!) che noia sarebbe s'io decidessi anche solo di tentare qui un elenco di quei testi cui ho fatto implicito riferimento …

Chiedo scusa per questa voluta omissione. Ma questa è un'occasione di festa.

D'altra parte i miei allievi più devoti sapranno a quali miei lavori scritti mi sono voluto riferire.

Preface

Bruno D'Amore

Abstract. I take this opportunity to make a summary of some personal beliefs about mathematics education, such as research and practice, developed over the years.

I'm deeply moved and touched by the friendship, the devotion, and the sympathy also displayed in this occasion by my students, some of whom in a particular way, who wanted to give me this present: inviting my friends, colleagues, collaborators, other students in order to reminisce together what is mathematics education, what is its importance, why it requires serious, deep, and well-prepared researchers; a collective tribute dedicated to one of the most beautiful disciplines in the world as well as to other closely related ones.
I would like to seize this wonderful international opportunity, amazed by the names of all the persons who wanted to participate, with or without a paper, to make kind of a ... personal confession about some of the points I consider to be key in mathematics education, both in research activities and in daily classroom work (my two favorite subjects, which in my opinion are still strongly interrelated). I hope that these subjects could also lead to future research.

Confession at 70 years old

My story

I received my degree in mathematics from the University of Bologna at 22 years old, and decided then that in my life I could not do anything else other than being a mathematician; and so I immediately started research in this field thanks to a CNR (*Consiglio Nazionale delle Ricerche*) scholarship, which was then converted into a MIUR (*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca*) scholarship.

A few years later, when mathematics education (which was not even called that back then) was presented to me, it seemed to me to be a set of vague trivia without a beginning or end; however later on, first studying Efraim Fischbein and then Guy Brosseau, an entire world opened up: I immediately recognized it as a kind of applied mathematics with potential for many theoretical applications that were just starting to be defined. In the meantime I had become a professor and founded an NRD (*Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica*) in the Mathematics Department of the University of Bologna with strong backing from the then director. I did this not out of a personal belief, not to be personally involved in research in didactics myself, but only to give this opportunity to others: It seemed right to me to give room for this kind of research (I don't remember exactly, but I think two NRD groups had just been started in Italy at the time). I continued being a mathematician, with a lot of curiosity for these new studies, but seen from the outside.

There was a lot of confusion back then; it seemed that in order to understand didactics, one needed to study pedagogy, so that I decided to get a degree in pedagogy, again from the University of Bologna (I was fortunate to meet some persons of high intellectual stature); four years later my thesis was immediately published: Perhaps this was my first true contribution to mathematics education.

I was aware of being profoundly ignorant in general; in the discussions with my epistemology teacher Francesco Speranza (who had also been my geometry teacher for a few months), he always came out ahead. Furthermore, I understood that in the study of didactics one needs to have a solid base not only in epistemology, but also in philosophy. Thus I decided to get a degree in philosophy, always from the University of Bologna (I was fortunate to meet some truly important luminaries). Four years later I graduated with a thesis that I have never wanted to publish.

Almost without realizing it, I had already entered the world of research in mathematics education. I had also left mathematics (which I have nonetheless always loved and feel I could always love) teaching and not just research. In the meantime I had started the annual *Incontri con la matematica* conference, presently in its 30th year in 2016, and the *La matematica e la sua didattica* journal, originally edited by the Armando Armando publishing house of Rome, then by Pitagora of Bologna, and presently by the "Incontri con la Matematica" Association.

The study of the works of Brousseau and Duval (and the immediate and deep friendship with these extraordinary pioneers) changed my life into becoming a fanatic of mathematics education. I practically witnessed its birth, followed it through its development, got to know and frequently met with the giants that created it one step at a time.

In 1996 I was Chief Organizer of the Topic Group: *Infinite processes throughout the curriculum*, at the VIII ICME, Seville, 14-21 July 1996; Raymond Duval himself was, in fact, the sole advisor; there we had a lot of opportunities for discussion.

I was studying like a madman; the more I studied, the more questions I asked myself. It was then that in order to answer some of these questions, I decided to embark on a PhD in *Mathematics Education*.

I have done experimental research, which has always brought me a lot of satisfaction, as well as theoretical research. I have worked both with the teachers and the students in the class-room in the mornings and without the students in the afternoons in order to try to fully understand the problems that afflict the schools and the root causes of the failure in learning mathematics by some students.

I have had brilliant and capable students that I'm proud of, and have collaborated with the best minds. I fully understand the famous quote of Newton on the *shoulders of giants*, only that I was able to get to known and meet the giants of mathematics education in person, and am still grateful to all of them.

My vision

My vision of mathematics education is, as I have previously stated, that of a kind of applied mathematics. I have some firm beliefs, which would have been normal at one time, but now seem to have been superseded; I'm listing them hereinafter, leaving the discussion to my students. In the following, a brief statement is sufficient for some points, while a more articulate discussion is needed for others.

a) In order to be involved in mathematics education, one needs to be an expert in mathematics.

b) Before talking about mathematics education with the tenured teachers or the students being trained to be future teachers, it is necessary to ensure that they understand the subjects of mathematics in question. If this is not the case, it is necessary to remedy this issue in order to be able to have an effective discussion. It must be necessary to have the courage to immediately interrupt the discussion about didactics and address the issues about mathematics.

c) In order to carry out research in mathematics education it is necessary to be a mathematician. (I have however three famous contrary examples to my own statement; three psychologists that in my opinion have brought prestige to mathematics education, three dear friends: Efraim Fischbein, Gérard Vergnaud, Raymond Duval).

d) Mathematics education is a kind of mathematics applied to the issues of teaching-learning, an actual science in all respects. Several elements that were

somehow acquired from other fields of human knowledge coalesced into this science, by being deconstructed from their original world and properly reconstructed, transformed into knowledge suitable for the world of mathematics education.
The origins of this knowledge are mainly the following (but the list is not exhaustive):

- the history of mathematics,
- epistemology of science and in particular of mathematics,
- pedagogy,
- general didactics,
- psychology of learning,
- evolutionary psychology,
- model theory,
- philosophy,
- linguistics,
- semiotics,
- sociology,

and others.
When someone asks me how to become an expert in mathematics education, I tell them that it is useless to follow my path of laborious and dispersive studies, because what is useful from these disciplines is presently already a component part of mathematics education.
A concrete and polemic corollary of this long discussion: When suggesting that the training of a mathematics teacher consists in a degree in mathematics followed by a course in pedagogy, one is committing a huge mistake of cultural ignorance; what is really needed professionally, after the study of mathematics, is mathematics education, which already includes the truly useful part of pedagogy.

e) The objective of research in mathematics education is to study class-room situations (in which the Knowledge in question is mathematics), and creating the tools to improve the quality of mathematics learning by the students. As a secondary factor: The teachers, who are already experts in the discipline and study with passion, enthusiasm, and success mathematics education, will have such a level of command of both disciplines that they will be able to make very substantial and radical modifications to the teaching profession.
I shudder when I hear someone that expects mathematics education to be a sort of "teaching to teach"; this is the dumbest thing a person could say or expect. As I have already stated, one can reasonably expect that a mathematics teacher who is knowledgeable in mathematics education will rethink their entire teaching approach and radically change their teaching format, their methodologies (in the plural), the choices intrinsic to the didactic transposition, didactic engineering, the contents, the expectations, the evaluation in a broad

sense (of their own effectiveness, the choices in the curriculum, and the knowledge/ability of their students).
As some of the results of our research have shown, teachers studying mathematics education radically change their beliefs about learning, and hence about teaching, and even about mathematics itself and its significance.

f) The proliferation of a huge variety of theories of mathematics education in these first 40 odd years of its life is certainly due to the fact that each theory addresses different subjects, has different specific objectives, is involved in different aspects of the research. New theories never exclude or dismiss an old one, unless they assimilate it, but without rejecting it. A new theory joins an old one in the pursuit of other research objectives.
I want to dwell on this subject for a bit longer.
The term "scientific theory" or "science" is usually reserved for all representations (symbolic, abstract, written,...) shared, consistent and plausible, of a set of phenomena interrelated by causal, describable, meaningful relations (cause-effect, deduction, induction,...).
By omitting for brevity the archaic path of the idea of science, the current ways of looking at scientific theories include the notion of "paradigm" (Thomas Kuhn). By "paradigm" we intend the set of general theoretical hypotheses and the set of laws for their application, which are commonly accepted by the members belonging to the same scientific community and which imply a substantial level of agreement in the professional, value, and relevance judgments.
In fact, in the formation of a new scientific community there is a moment from which it is possible to speak of a "paradigm". The preceding phase is characterized by the lack of organization, no specific agreements, and a constant need to debate the principles of the discipline itself: In this phase it seems as if there are as many theories as researchers, and there is a constant need and requirement to clarify their own and other people's points of view. Written works of research in the field are often accompanied by explanations about the general characteristics of the research itself. Kuhn's most famous thesis is the one in which scientific progress occurs in "revolutions", on account of the fact that the transition or evolution occurs only after a crisis.
Another fundamental contribution is the one proposed in the 60's by Imre Lakatos, about the idea of a "research program"; that is to say a sequence of scientific theories connected to each other and in continuous development, which contain research methodological rules (both in positive terms, i.e. the rules to follow, and in negative terms, i.e. the rules to avoid).
Each program must contain:

- a nucleus or center of the program;
- a system of auxiliary hypotheses;
- the heuristics, that is to say the procedures applied to solve the problems.

Hence, in this sequence a new theory can be considered to be progress with respect to a previous one if:

- It makes predictions the previous one was not capable of doing;
- Some of these predictions can be proven to be true;
- The new theory explains facts the previous one was not able to prove.

Another remarkable theoretical contribution is that attributed to Mario Bunge in the 80's: Science is a constantly growing body of knowledge, characterized by dealing with rational, systematic, exact, verifiable (and hence also fallible) knowledge. Scientific knowledge is the set of ideas on a particular subject, which were established provisionally for the time being; but then the participation of the individuals and the exchange of information and ideas give rise to a scientific community. What characterizes the difference between fields of belief (religions, ideologies, politics,...) and fields of scientific research, is the type of mechanism according to which "changes" in the ideas occur; in the first case the changes occur as a result of "revelations", controversies, social pressure, while in the second case change is continuous as a result of the actual results of the research.

According to a "weaker" requirement, a scientific theory is defined nowadays when it is provided with a specific object of study, its own research method, and its own specific shared language; this requirement is often cited by theoretical researchers in the humanities, precisely in order to call these domains of study "science".

In the last few years this "weak" requirement has caused the "science" moniker to be applied to many disciplines. In fact, any discipline in which the scholars that participate in its development mutually recognize and accept each other as experts in the subject, founding in the process a community of shared practices that utilize the same language, sooner or later acquires precisely the characteristics that were just described. The issue of the experimental repeatability, proper definition of the relevant variables, the meaning that terms such as "rigorous", "true", etc. acquire, tends to disappear or be profoundly modified.

What is shared in all these interpretations is that scientific theories cannot be the result of the creation or invention of a single individual, but there must be a community of people who share a substantial agreement on both the significant research problems, on the manner in which it is carried out, and on the language utilized.

In this direction, at the end of the 80's Thomas A. Romberg defined the peculiar characteristics of a consolidated and stable scientific theory by stating that:

- There must be a collection of researchers that demonstrate shared interests; in other words, there must be central issues guiding the work of the researchers and these must be shared.
- The explanations given by the researchers must be of the causal type.

- The group of researchers must have created a shared vocabulary and syntax, about which the group is in agreement.
- The group must have created its own procedures for accepting or refuting the statements in a manner considered to be objective by everyone and which can be broadly shared.

The sciences understood in this manner clearly include education in the various disciplines, and in particular mathematics education. In fact everyone can observe:

- The existence of many international groups of researchers in education in the various disciplines who have shared interests;
- Who share issues which are considered to be central;
- Who have been providing causal explanations (for a few decades);
- Who have created a shared, common language;
- They have specific conferences and their own journals, inside of which the communication and publication proposals are refereed on the basis of procedures that have been broadly shared in advance.

We hence have all the conditions proposed by Romberg to state that mathematics education holds all the characteristics to be considered a solid and stable science.

My friend – colleague – and multiple time co-author Luis Radford proposes to view a theory as:

> A way of producing understandings and ways of action based on:
>
> - A system, *P*, of *basic principles*, which includes implicit views and explicit statements that delineate the frontier of what will be the universe of discourse and the adopted research perspective.
> - A *methodology*, *M*, which includes techniques of data collection and data interpretation as supported by *P*.
> - A set, *Q*, of paradigmatic *research questions* (templates or schemas that generate specific questions as new interpretations arise or as the principles are deepened, expanded, or modified).

Once again, mathematics education fits like a glove with this type of requirement-definition.

g) I'm not at all in favor of a harsh internal war between the theories of mathematics education; rather, I'm in favor of the so-called unification of the theories, in more than one of the ways in which this unification may occur. I myself have worked hard and produced many results in this direction.

If you want to create learning, you must support and utilize several teaching methodologies

Taking a sentence of Immanuel Kant, which after paraphrasing and summarizing, sounds more or less as follows: In the same manner as a liquid

assumes the shape of the container that holds it, the concept assumes the characteristic of the person constructing it for themselves. Hence the concept should be deconstructed into its apparent objectivity and reconstructed while adapting it to the individual.
Research in mathematics education has confirmed that the following is also valid for teaching-learning mathematics: In case of a sender and an emission (message), all human beings are forced by their own human nature to interpret said message; that is to say, in reality the receiver does not receive the message from the sender, but transforms it, personalizes it, and interprets it. In other words: Everyone learns in their own manner, on the basis of their own personality, their experience, their culture. That is to say, if there are several students in a class-room, their learning will not be unique; it will not coincide precisely with what the teacher said or asked to do, but each personal learning will be the result of the interpretation of the original message. (Naturally we know full well that there are several more or less "strong" positions in this regard, from a few very radical ones to other weaker ones).
Therefore, the idea of unified teaching, utilizing a single teaching methodology with a prepackaged method, is already in itself a didactic error. It is not even possible to think of proposing ONE method in the class-room. Just thinking of this is the prelude to certain failure in the learning process. The teacher must use several methodologies, several tools, several methods, in the hopes of "reaching" some of the students by means of each one of them. If several students receive "different" messages based on different methodologies, all the better, they will learn from several points of view, so that the cognitive transfer will be facilitated while the cognitive construction of the mathematical object will be more complete.
It would be scientifically and ethically appropriate that *all* those who have created, or think they have created, a method or a tool or a didactic methodology, would submit it to severe and serious scientific evaluation, or propose it on refereed scientific journals, or participate in research conferences, or just any conferences attended by colleagues with a critical mind.
Within this scope, in the past it was normal to create "structured materials" (that is to say, specific, specially arranged materials: Who does not remember this term?) in order to offer unique didactic methods. I only remember two examples which have had worldwide success, the logic blocks (and more) of the Hungarian Zoltan Paul Dienes, and the *papygrammes* (together with the arrows and the minicomputer) of the Belgian Georges Papy. Both have dominated the world of mathematics teaching by offering unique tools for teaching-learning mathematics. These were two true mathematicians, the first one with a doctorate from London and the second from Bruxelles, not improvised amateurs; I had the opportunity of meeting both in person and even get to know them privately.

The analytical and critical studies of Guy Brosseau, the creator of modern mathematics education, put an end to the didactic works of Dienes in the 80's, by showing the deleterious "Dienes effect" in an absolutely obvious form. An effect that was recognized in public by Dienes himself (at Forlì on May 8th, 1993, in my presence). While the critique that put an end to the tools created by Papy came from the same group he created (the GIRP, *Groupe International de Recherche en Pédagogie de la Mathématique*, located in Walferdanche, Luxembourg, where I was president for 3 years).

Nowadays no one talks about those methods anymore. However, at the time they deceived the world with the trap called "new mathematics" or "modern mathematics".

One cannot be against a tool or method as a matter of principle; on the contrary, it would be desirable for teachers to be provided with a thousand tools and a thousand methods! What we must oppose is not a tool or method; the mistake is to make a single choice or ascribe miraculous-didactic powers to the tool (in the singular) or the method (in the singular), which it cannot have, because this is expected of the teacher, the instructor, the human being that teaches, rather than the tool or method. The very delicate and extremely complicated teaching-learning process is connected to the relational issues connecting the three elements in the class-room: teacher, student, and Knowledge (mathematical Knowledge).

The numbers in colors (the *reglettes*) of Cuisenaire-Gattegno, the BAM of Dienes, the arrows of Papy, the number line, Dienes' logic blocks, the abacus, sorobans, calculators, LIM, every TIC, every didactic software package, they are all welcome. The more tools are available, the greater choices for the teacher. The more didactic strategies the teachers know, the better; they will be able to apply different strategies accordingly.

What is absurd anti-didactic wrong is to believe that it is possible to make a single choice, that a single strategy (or other similar ones) holds the recipe, the magic formula, the panacea.

It is necessary to use, and know how to use, each tool, each methodology, while at the same time mistrusting it, knowing their limitations, because all tools will always have their limitations.

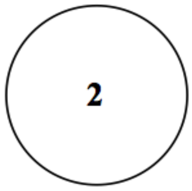
The mystic magical revelations of the creators of foolproof didactic theories belong in the category of beliefs that I called "fields of belied" in point f. They are closer to astrology than to science or didactics, also from just the point of view of empirical science.

An example analysis of class-room situations

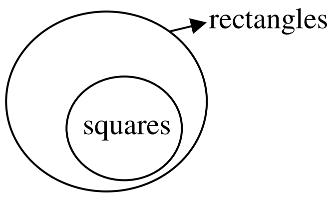
A few years back Guy Brousseau and I studied many examples and denounced in writing the phenomenon of "meta-didactical slippage". These phenomena

appear following a defeat, a failure, which is usually inevitable; however this fact is not recognized immediately as such in naïve didactics.
The teachers explain, then they explain the explanations, illustrate them, and then explain the illustrations... The attempts to correct the initial failure in the learning process turn out to be inappropriate every time. The phenomenon is amplified and gets quickly out of hand. And so, as in the great pandemics of the Middle Ages, there are those who seize the opportunity to denounce all sorts of teaching practices they presume to renew, by mutilating them in order to send some "theory" to the stake and forget the results of the ill-fated experiences.
Let's consider a concrete example. At the end of the 50's, the reorganization of mathematical knowledge was capping a hundred years of remarkable discoveries. Society, the cultural centers and the teaching establishment recognized the need to adapt themselves to them. However the greatest difficulty laid in how to introduce the fundamentals: How to adapt the axiomatic approach in a teaching process used to associating the objects with its languages? All the aspects of mathematics require logic in a suitable form. The proposal was then made to use a naive set theory as a replacement for classical logic, and replace school mathematics with this theory. *This is the first didactical slippage*: The tool itself becomes the object of study.
In order to utilize logic with more ease, logic is replaced with a sort of description or model. In reality a great deal of simplification is carried out: All that is required is to provide the user instructions. We think about set theory, but in reality graphs are introduced; the very language of sets is made more "concrete" by appealing to another idea of Leonard Euler, who used circles to illustrate, enumerate, and classify syllogisms for one of his noble students. At the time it seemed that this idea would have allowed to make teaching Aristotelian logic and the foundation of the entire mathematical language much easier, even to very young children, so that the terminology would be the same from kindergarten to University. *This is a second didactical slippage*: From the study of logic, we have transitioned to the study of the graphical tool, which in reality should only constitute a representation.
However this time the "representation" is just a metaphor: Sets do not have borders, while their drawings do; the union of the parts is not visible as a "set" anymore, etc. Nonetheless, in teaching it is also necessary to combine notions which are rather well defined with others which are nothing more than a "transposed" approach: The rules of the game are different; most of all at the lower levels where well *formulated* and *consistent* usage rules are needed.
The everyday language introduced to describe the metaphor of Euler's circles constitutes a *new meta slippage*: From studying the graphical tool we have transitioned to the everyday language describing it. At the time Georges Papy proposed to color the border of the circles in order to identify the connected

components in the same set. But the materialization of the elements by means of the points raises new contradictions.



It is not clear if the 2 sign represented in a circle is its only element, or a kind of variable, an element identified for exemplification purposes that evokes others, such as for example all the even numbers, which are not represented, or if the element is the “2” sign itself.
A specific vocabulary is also needed to describe these figures. In French, under the influence of Georges Papy, they were first called “potatoes”, and then “papygramme”. In Italian they did not assume any specific designation in the class-room, only “set diagrams” or “Euler-Venn diagrams”, while the respective discipline was called “set theory”. This new vocabulary can be considered as the constituting element of this last definitive slippage: The original mathematics has been lost, it is no longer clear what is being taught and what is being required to learn.
If we wanted to accept the set theory metaphor, in order to avoid the subsequent slippages in a single stroke, we should have restricted the drawings to a purely illustrative role, a means of expression, without codifying them or teaching their graphical and linguistic rules. They would have created a set of implicit knowledge (know-how) to represent what is being discussed in order to become persuaded, and which could be utilized; however without the need for a significant proving status of theoretical knowledge, and hence without a grammar and without theory. What can be called know-how, but not knowledge.
In other words, a graph similar to the one below can be used:



to illustrate that “All squares are rectangles, but some rectangles are not squares”, without having to specifically deal with a set theory that comprises: sets, properties, elements, membership, the empty set, the universal set, inclusion, intersection, union, the subset, inclusion, Cartesian product,

bijection, reflexive, symmetric, and transitive relation, passage to the quotient set, etcetera, all pointlessly oversized in order to be able to use some graphs trivially, which are already eminently comprehensible.
The meta-didactical slippages may occur in relation to any mathematical notion, but also mathematical action.
For example, let's consider the pseudo-teaching of *problem solving* methods.
The difficulties encountered by the students in solving problems often leave the teachers powerless. The students "know" their knowledge, and "their" theorems (which are sometimes just "theorems-in-act"), but they are not able to use them to solve the problems at hand. A classic response in primary school consists in presenting similar problems to the student that failed, so that the student may reproduce the solution they learned in a similar case, understanding the similarity but not the meaning of the solution.
They do not need to know if their answer is suitable, nor why; it is sufficient if it conforms to the model expected by the teacher as the answer. In this manner, they can provide an answer within the scope of a didactic contract without understanding why their solution is correct. Regardless of the various theories of knowledge and learning, which are based on the "recognition" of the knowledge and being able to recite it, the students simulate a solution they may not understand.
In a more concrete way, in order to guide the students George Polya lavishes neo-Cartesian recommendations for organizing problem resolution, by proposing himself as the paradigm: Understand the statement, connect it to previous knowledge, decompose it into steps,... In this manner he suggests trying more heuristic steps: Look for similarities, an example, a counterexample, generalize, compare, check the work,... This work, which was intended to be merely descriptive, served as the basis of a disastrous and naive attempt to teach the resolution of problems based on the use of these heuristics. This is clearly a meta-didactical slippage: The resolution of problems is replaced by the study of the procedures of these resolutions. While it is likely that the given examples attempt to reassure and make the students more combative, it is clear that the situation has slipped without changing its nature: The students attempt to apply their heuristics in the same manner as they attempted to apply their knowledge and their theorems, but success is by no means assured, unless the problems are chosen ad-hoc. Is there a need to look for second-order heuristics? Even if the process is not recursive, the fallacy is fatal. The only difference is that theorems are mathematical knowledge that contain their own conditions of validity, which is not the case of heuristics that are only know-how. Treating them as knowledge is an epistemological and didactic error.
Even more dangerous is the dream of transforming the resolution of problems into algorithms, which is the uncritical extension of this meta-didactical slippage; they are of two types:

1. Rather than solving the problem, construct a block diagram or a flow-chart that illustrates it; this dumb choice led to study block diagrams and flow-charts as if they were the object under study; a disastrous meta-didactical slippage.
2. Normative systems with null or negative effect: "Circle the numeric data in the text of the problem in red; underline the question in green; look for the key word that allows you to recognize the operation that must be applied to solve the problem...".

All of these are meta-didactical slippage conditions that transform the solution of the problem into trivia that do not facilitate in any way the activity of problem solving. Take for example my example from 1992: "A sheepherder has 12 sheep and 6 goats. How old is the sheepherder?" Go ahead and circle the data 12 and 6 in red; go ahead and underline the question in green: "How old is the sheepherder?"; also look for the key word that helps to decide the operation... Yeah, but which one? "How old?", "and"? The solver that is really following these "rules" is doomed to provide the answer "18", which is the case in the absolute majority of the answers to this verbal problem. The students are no longer able to read the text critically in order to provide a reasonable solution. They are stunned by the imposed meta-didactical slippage; they carry out the suggested steps and then forget the logic of the text and start shooting numerical answers that seem to be appropriate, which are in fact the obligatory answers determined by the suggested absurd procedure.

Thus *meta-didactical slippage* consists in the teachers moving the object of their teaching from an activity or notion onto one of their control means. For example, a language teacher replaces the correction of an error by the students with the enunciation of the grammatical rule that was violated. This step is perfectly legitimate, in principle; but this behavior of the teacher is perceived by the students as removing them from the specific circumstances of the occurrence; a generalization of their concrete error.

All of this may at times constitute a very damaging hijacking of the activity. The persons involved in the teaching-learning, teacher and student, (both) lose track of their project and become lost. For example:

- Instead of studying proportionality, students are taught the rule to follow (also known as "the rule of three") in order to answer the question about proportion;
- Instead of understanding the internal intrinsic conditions of a system of two linear equations, they must learn Cramer's rule;
- Instead of studying the logic of the statements, they must learn by heart the semantic truth tables of the connectives;
- Instead of studying what is a surface, they are given the rules for calculating the area of a quadrilateral;
- Instead of studying and learning Ruffini's theorem, they are taught Ruffini's rule;

- From a means to evaluate the results of learning, national and international tests first became the objectives of teaching, then they became the means of teaching, and finally the very object of teaching; they tend to transform our conception of knowledge and learning into a sort of exercise;

etcetera.
These are evidently still extremely powerful and dangerous meta-didactical slippages.

References

"My twenty-five readers may imagine" (25?; I wish, dear Alessandro!)[1] what a bore it would be if I decided to even try to list the texts I have implicitly referred to…
I apologize for this deliberate omission. But this is a festive occasion.
In any event, my most devout students will know to which of my works I was referring.

[Traduzione di Maura Iori]

[1] Alessandro Manzoni is one of the great Italian writers, poet, and author of theater texts. His novel *The Betrothed* (1st edition: 1827; 40th edition: 1841) is one of the great classics of Italian literature. Furthermore this novel should mainly be credited with contributing to the unification of the Italian language during a period in which the various dialects and regional languages made communicating throughout the peninsula, which would later become the Kingdom of Italy (from 1861 to 1946), impossible. In Chapter 1 of the novel, the Author ironically addresses the reader of his masterpiece with the famous sentence *my twenty-five readers*, with modesty. In reality the book was extremely successful from the very beginning. The novel has been translated into twenty-one foreign languages, with derivative operas, movies, musicals, parodies, comics,...

Prefacio

Bruno D'Amore

Abstract. I take this opportunity to make a summary of some personal beliefs about mathematics education, such as research and practice, developed over the years.

Me siento profundamente conmovido de la amistad, de la devoción, de la simpatía demostrada también en esta ocasión por mis alumnos, algunos de forma muy especial, quienes quisieron hacerme este regalo: reunir amigos, colegas, colaboradores y alumnos para recordar, todos juntos, qué es la didáctica de la matemática, cuál es su importancia, y por qué necesita de investigadores serios, profundos y preparados. Un himno cantado a varias voces dedicado a una de las disciplinas más bellas del mundo y a otras que quedan bien a su lado.

Aprovecho entonces esta magnífica ocasión internacional, sorprendido por todos aquellos que han querido participar, con o sin texto, para hacer una especie de … confesión personal sobre algunos puntos que considero claves para la didáctica de la matemática, sea como línea de investigación, sea como praxis cotidiana de trabajo en aula (mis dos caballos de batalla, que aún veo fuertemente entrelazados). Auspicio que sobre estos temas aún se puedan desarrollar investigaciones en el futuro.

Confesión a los 70 años

La historia

Obtuve el título en matemática en la Universidad de Bologna a la edad de 22 años y decidí en ese momento que en mi vida no habría podido ser otra cosa que matemático. Así me inicié inmediatamente a hacer investigación en este campo, gracias a una beca del CNR (Consejo Nacional de las Investigaciones)

transformada después en beca del MIUR (Ministerio de la Instrucción, de la Universidad y de la Investigación).
Algunos años después, cuando me presentaron a la didáctica de la matemática (que en esa época ni siquiera se llamaba así) me pareció un conjunto de banalidades vagas sin pies ni cabeza. Pero después, estudiando, primero los trabajos de Efraim Fischbein y después los de Guy Brousseau, se me abrió un mundo y la reconocí como una matemática aplicada con grandes potencialidades teóricas y científicas que apenas iniciaban a delinearse. En ese tiempo, ya como docente de la Universidad de Bologna, fundé en el Departamento de Matemática, en total acuerdo con el entonces director, un NRD (Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática) no por convicción, no para hacer yo mismo investigación en didáctica en primera persona, sino para que otros la pudieran hacer: consideraba justo dar espacio a este tipo de investigación (no recuerdo muy bien, pero creo que en Italia sólo existían otros dos grupos NRD). Yo continuaba siendo un matemático, con curiosidad por estos nuevos estudios, pero vistos siempre desde el exterior.
Existía una gran confusión en aquellos tiempos y parecía que, para entender la didáctica era necesario estudiar pedagogía; y así decidí obtener, también en Bologna, el título en pedagogía (y tuve la suerte de encontrar algunos personajes de alta envergadura cultural). Conseguí el título cuatro años después y realicé una tesis que se publicó inmediatamente: tal vez esta era mi primera contribución verdadera a la didáctica de la matemática.
Era consciente de mi profunda ignorancia en general y en las discusiones con mi maestro de epistemología Francesco Speranza (que por unos pocos meses fue mi docente de geometría) llevaba siempre las de perder. Además entendía que en el estudio de la didáctica necesitaba dominar no sólo la epistemología, sino también la filosofía; y así decidí obtener el título en filosofía, también en la Universidad de Bologna (tuve la suerte de encontrar inteligencias en verdad notables). Conseguí el título cuatro años después y realicé una tesis que nunca quise publicar.
Casi sin darme cuenta, había entrado en el mundo de la investigación en didáctica de la matemática, había dejado la matemática (que siempre he amado y siento que la amaré siempre) no sólo como enseñanza sino también como investigación. Mientras tanto, había dado inicio al Congreso anual *Incontri con la matemática* (hoy, en el 2016, con la edición número 30), y a la revista *La matematica e la sua didattica*, editada por Armando Armando de Roma primero, después por Pitagora de Bologna y hoy por la asociación "Incontri con la Matematica".
El estudio de las obras de Brousseau y de Duval (y la amistad inmediata y profunda con estos extraordinarios pioneros) cambió mi vida y me convertí en un fanático de la didáctica de la matemática. La vi prácticamente nacer, la seguí en sus evoluciones, conocí y frecuenté los gigantes que la han creado paso a paso. Entiendo plenamente la famosa frase de Newton sobre las

espaldas de los gigantes, sólo que yo a los gigantes de la didáctica los he conocido y frecuentado personalmente, y todavia hoy estoy muy agradecido con todos ellos.
En 1996 fui Chief Organizer del Topic Group: *Infinite processes throughout the curriculum*, en el VIII ICME, Sevilla, España, 14-21 julio 1996; Raymond Duval mismo fue, de hecho, mi único Advisor; después fueron numerosas las ocasiones que compartimos.
Estudiaba mucho, muchísimo y, mientras más estudiaba me surgían más preguntabas. Fue entonces que, para responder a algunas de estas, decidí hacer el PhD en *Mathematics Education*.
He hecho investigaciones de carácter tanto empírico como teórico que me han dado grandes satisfacciones. He dedicado tiempo a los docentes en el aula, con estudiantes por las mañanas y sin estudiantes en las tardes, para intentar entender cuáles eran los problemas que afligen la escuela y el porqué del marcado fracaso en el aprendizaje de la matemática por parte de algunos estudiantes.
Tuve y tengo alumnos brillantes y capaces, de los cuales me enorgullezco y he colaborado con cerebros de primer orden.

Mi visión

Mi visión de la didáctica de la matemática es, como ya lo he dicho, cómo matemática aplicada. Tengo convicciones profundas que una vez eran consideradas normales pero que ahora parecen superadas. Las indico a continuación, dejándolas para la discusión de mis alumnos. En lo que sigue, para algunos puntos bastan pocas palabras, pero otros requieren un discurso largo y estructurado:

a) Para ocuparse de didáctica de la matemática, es necesario ser experto en matemática.

b) Antes de hablar de didáctica de la matemática con los docentes en servicio o con los estudiantes en formación como futuros docentes, es necesario estar seguros que quienes nos escuchan entiendan los temas de matemática que constituyen el objeto del discurso. Si no es así, es necesario remediar la situación para no volver vago y vacío el discurso. Se requiere tener el coraje de abandonar inmediatamente el discurso sobre la didáctica para afrontar el argumento matemático en cuestión.

c) Para hacer investigación en didáctica de la matemática se requiere ser matemático. (Pero tengo tres ejemplos ilustres que dicen lo contrario de lo que estoy declarando, tres psicólogos que, en mi opinión, han dado lustro a la didáctica de la matemática, tres queridos amigos: Efraim Fischbein, Gérard Vergnaud, y Raymond Duval).

d) La didáctica de la matemática es una matemática aplicada a la problemática de la enseñanza – aprendizaje, una verdadera ciencia; en esta confluyen elementos adquiridos de alguna forma desde otros campos del saber humano, descontextualizados de su mundo original y adecuadamente re-contextualizados, transformados en saberes idóneos al mundo de la didáctica de la matemática.
Los mundos de proveniencia de dichos saberes son básicamente los siguientes (pero el elenco no es exhaustivo):

- la historia de la matemática,
- la epistemología de la ciencia y en particular de la matemática,
- la pedagogía,
- la didáctica general,
- la psicología del aprendizaje,
- la psicología evolutiva,
- la teoría de modelos,
- la filosofía,
- la lingüística,
- la semiótica,
- la sociología,

y otras.
A quien me pregunta cómo se puede convertir en experto en didáctica de la matemática, le indico que es inútil seguir mí afanoso y dispersivo recorrido de estudios, porque lo que necesita la didáctica de la matemática de estas otras disciplinas, hoy, está ya integrado dentro de la estructura teórica de la didáctica de la matemática.
Corolario concreto y polémico de esta larga disquisición: cuando se sugiere que la formación de un docente de matemática debe consistir en un título universitario en matemática seguido de un curso de pedagogía, se está cometiendo un error monstruoso de ingenuidad cultural. Lo que profesionalmente sirve en verdad, después de la matemática, es la didáctica de la matemática que ya contiene lo que podría aportar la pedagogía

e) El objetivo de la investigación en didáctica de la matemática es el de estudiar situaciones de aula (en las cuales el objeto “Saber” es la matemática) y de crear instrumentos para aumentar la calidad del aprendizaje de la matemática por parte de los estudiantes. Como factor secundario: el docente que, siendo experto en la disciplina, estudia con pasión, entusiasmo y éxito la didáctica de la matemática, dominará las dos lo cual le permitirá aportar cambios consistentes y radicales a su profesión docente.
Me asusta la idea de encontrar quienes piensan que la didáctica de la matemática es una especie de “enseñar a enseñar”; es la idea más estúpida que puede ser expresada o que se puede escuchar. Se puede pensar, como ya lo dije, que un docente de matemática que conozca la didáctica de la matemática

re-interpreta toda su profesionalidad docente y cambia radicalmente su forma de enseñar, las metodologías (en plural), las elecciones intrínsecas a la transposición didáctica, la ingeniería didáctica, los contenidos, las expectativas, y la evaluación entendida en sentido amplio (de su misma eficacia, de las elecciones curriculares y del saber/competencia de sus estudiantes).
Un docente que estudia la didáctica de la matemática, como algunos de los resultados de nuestras investigaciones han evidenciado, cambia radicalmente sus convicciones sobre el aprendizaje, por tanto sobre su enseñanza, e incluso sobre la misma matemática y sobre su significado.

f) El proliferar de una gran cantidad de teorías en didáctica de la matemática en estos 40 años y algunos más de vida de esta disciplina se debió al hecho de que cada una de las teorías afronta temáticas diversas, tiene objetivos diferentes, se ocupa de aspectos de investigación diferentes; nunca un nueva teoría excluye o descarta una precedente, a menos que no la incluya, pero sin rechazarla; una nueva teoría se anexa a una precedente, persiguiendo otros fines de investigación.
Sobre este tema deseo extenderme un poco más.
El término “teoría científica” o “ciencia” está generalmente reservado a toda representación (simbólica, abstracta, escrita,…) compartida, coherente y plausible, de un conjunto de fenómenos conectados entre sí por relaciones causales, describibles, significativas (causa – efecto, deducción, inducción,…).
Dejando de lado, por brevedad, el recorrido arcaico de la idea de ciencia, en los modos actuales de considerar una teoría científica se encuentra la noción de “paradigma” (Thomas Kuhn). Se entiende por “paradigma” el conjunto de las hipótesis teóricas generales y el conjunto de las leyes, comúnmente aceptadas por quienes pertenecen a una misma comunidad científica, y que implican un acuerdo sustancial en los juicios profesionales, de mérito y de pertinencia.
En la formación de una nueva comunidad científica, existe un momento a partir del cual se puede hablar precisamente de “paradigma”. La fase que precede está caracterizada por una desorganización, sin acuerdos específicos, y con una constante solicitud de debate sobre los fundamentos de la disciplina misma: se puede decir que en esta fase existen tantas teorías como investigadores y una continua petición de clarificación de los puntos de vista propios y de los otros. Los trabajos escritos de investigación en el campo son generalmente acompañados de explicaciones sobre el carácter general de la investigación misma. La tesis de Kuhn más conocida es aquella según la cual el progreso científico procede según “revoluciones”, dado que se habla de cambio, de evolución, sólo después de una crisis.
Otra contribución fundamental es aquella propuesta en los años ’60 por Imre Lakatos, con la idea de “programa de investigación”, es decir una sucesión de teorías científicas relacionadas entre sí en un desarrollo continuo, con reglas

metodológicas de investigación (sea en positivo, para seguir, sea en negativo para evitar).
Cada programa debe contener:

- un núcleo o centro del programa;
- un sistema de hipótesis auxiliares;
- una heurística, es decir los procedimientos que se aplican a la resolución de los problemas.

En esta sucesión, una nueva teoría puede ser considerada un progreso respecto a una teoría precedente si:

- hace predicciones que la precedente no era capaz de hacer;
- algunas de dichas predicciones se pueden probar como verdaderas;
- la nueva teoría explica hechos que la precedente no podía probar.

Otra notable contribución teórica fue debida a Mario Bunge, en los años '80: la ciencia es un cuerpo de conocimientos en constante crecimiento, caracterizado por tratarse de conocimientos racionales, sistemáticos, exactos, verificables (y por tanto también falibles). El conocimiento científico coincide con el conjunto de las ideas sobre un cierto argumento, establecidas de forma momentáneamente provisorias; pero, después, el trabajo individual y el intercambio de informaciones y de ideas dan lugar a una comunidad científica. Lo que caracteriza la diferencia entre campos de creencias (religión, ideologías, políticas,…) y campos de investigación científica es el tipo de modalidad según las cuales se presentan los "cambios" en las ideas; en los primeros, los cambios se presentan a causa de "revelaciones", controversias, presiones sociales; en los segundos el cambio es continuo a causa de los mismos resultados de investigación.
Según posiciones más "débiles", hoy una teoría científica se define cuando dispone de un objeto específico de estudio, de un método propio de investigación y de un lenguaje específico y compartido; a esta idea hacen referencia los teóricos de las ciencias humanas, para llamar "ciencia" precisamente, a dichos dominios de estudio.
En los últimos años esta condición "débil" hizo proliferar el apelativo de "ciencias" dado a muchas disciplinas. De hecho, toda disciplina para la cual el desarrollo depende de estudiosos que se reconocen y se acepten recíprocamente como expertos en dicha disciplina, conformando una comunidad de prácticas compartidas, que hacen uso del mismo lenguaje, antes o después adquiere las características descritas con anterioridad . El problema de la repetitividad de los experimentos, de la correcta definición de las variables en juego, del sentido que adquieren términos como "riguroso", "verdadero" etc., tiende a desvanecerse o a sufrir profundas modificaciones.
Lo que hay en común en todas estas interpretaciones es que las teorías científicas no pueden ser creaciones o invenciones de una única persona, sino que requieren de una comunidad de personas entre las cuales rige un sustancial

acuerdo, ya sea sobre los problemas significativos de la investigación, como sobre las modalidades que explica, así como el lenguaje usado.
En esta dirección, Thomas A. Romberg, a finales de los años '80, definía las características peculiares de una teoría científica consolidad y estable afirmando que:

- debe existir un conjunto de investigadores que demuestren intereses comunes; en otras palabras deben existir problemáticas centrales que guíen el trabajo de los investigadores y que sean compartidas;
- las explicaciones dadas por los investigadores deben ser de tipo causal;
- el grupo de los investigadores debe tener elaborado un vocabulario y una sintaxis común, sobre la cual el grupo esté de acuerdo;
- el grupo debe haber elaborado procedimientos propios para aceptar o rechazar los enunciados de forma tal que dicho juicio sea considerado objetivo y ampliamente compartido.

Entre las ciencias entendidas así, entran las didácticas disciplinarias y por tanto, en particular, la didáctica de la matemática. Está en la mirada de todos, de hecho:

- la existencia de un nutrido grupo internacional de investigadores en la diversas didácticas disciplinarias que tienen intereses comunes,
- para quienes existen problemáticas consideradas centrales y compartidas,
- que proponen (desde hace algunos decenios) explicaciones de carácter causal,
- que han elaborado un vocabulario común, y compartido;
- ellos tienen congresos y revistas específicas, en las cuales las propuestas de comunicación o de publicación son evaluadas sobre la base de procedimientos hoy en día ampliamente compartidos.

Estamos entonces plenamente dentro de las condiciones propuestas por Romberg para poder afirmar que la didáctica de la matemática tiene todas las características para ser considerada ciencia consolidada y estable.
El amigo – colega y tantas veces coautor Luis Radford propone que una teoría sea vista como:

> una forma de producir interpretaciones y modos de actuar basados en:
> un sistema, P, de *principios fundamentales*, que incluya visiones implícitas y afirmaciones explicitas que delinean los confines del universo del discurso y de la prospectiva de la investigación adoptada;
> una *metodología*, M, que incluya técnicas de recolección y de interpretación de datos, sostenidos por P;
> un conjunto, D, de *preguntas de investigación* paradigmáticas (modelos o esquemas que generan preguntas específicas cuando se presentan nuevas interpretaciones o cuando se profundizan, amplían o modifican los principios).

Aún una vez más, la didáctica de la matemática viene como anillo al dedo con este tipo de exigencia – definición.

g) Yo no soy, en ningún caso, favorable a la drástica lucha entre teorías en didáctica de la matemática; soy por el contrario favorable a la llamada unificación de las teorías, en más de una de las modalidades en las cuales esta unificación puede presentarse. Yo mismo tengo trabajos y he aportado un gran número de resultados en esta dirección.

Incentivar y usar varias metodologías de enseñanza, si se quiere producir aprendizaje

Tomo en consideración una frase de Immanuel Kant que, parafraseando y resumiendo, suena más o menos como sigue: así como un líquido adquiere la forma del contenedor que lo contiene, el concepto asume las características de quien lo está construyendo. Por tanto el concepto es de-construido en su aparente objetividad y es re-construido adaptándolo individualmente a cada persona.

La investigación en didáctica de la matemática ha confirmado que es válido para la enseñanza-aprendizaje lo siguiente: frente a un emisor y a una emisión (mensaje), cada uno de los seres humanos está obligado por su misma naturaleza a interpretar dicho mensaje; es decir, el receptor no recibe en realidad el mensaje del emisor, sino que lo transforma, lo personaliza, lo interpreta. Dicho en otras palabras: cada uno aprende siguiendo una forma personal, sobre la base de su personalidad, de su experiencia, de su cultura. Es decir, si en un aula hay varios estudiantes, su aprendizaje no será unívoco, no será banalmente coincidente con aquello que el docente dijo o hizo, cada uno de los aprendizajes personales será el resultado de una interpretación del mensaje inicial. (Naturalmente sabemos muy bien que existen varias posiciones más o menos "fuertes" al respecto, desde algunas muy radicales hasta otras más débiles).

Por tanto la idea de una enseñanza unívoca, del uso de una única metodología de enseñanza, con un método pre-confeccionado, es ya en sí misma un error didáctico; no se puede ni siquiera pensar en proponer UN método en aula. En sólo pensarlo es ya la antecámara de un fracaso seguro en el proceso de aprendizaje. El docente deberá usar más de un metodología, más de un instrumento, más de un método, con la esperanza de "alcanzar", con cada uno de ellos, a algún estudiante; si por casualidad un gran número de estudiantes recibe mensajes "diversos" sobre la base del uso de metodologías diversas, mejor, aprenderán desde varios puntos de vista y como consecuencia la transferencia transfer cognitivo será facilitada y la construcción cognitiva del objeto matemático será más completa.

Sería oportuno científica y éticamente que todos aquellos que han ideado, que piensan haber ideado, un método o un instrumento o una metodología didáctica, la sometieran al severo y serio juicio científico, o lo propusieran en revistas científicas con el arbitraje acreditado que requiere un artículo de estas

características, o que participaran en congresos de investigación o incluso sólo en congresos en los cuales participan colegas críticos.
En este ámbito, en el pasado era normal crear “material estructurado” (es decir, específicos o específicamente predispuestos: ¿quién no recuerda esta ”expresión”?) para proponer didácticas univocas; recuerdo sólo dos ejemplos que tuvieron un éxito planetario, los bloques lógicos (y otros materiales) del húngaro Zoltan Paul Dienes y los papygramas (y las flechas y el minicomputador) del belga George Papy; los dos dominaron el mundo de la enseñanza de la matemática proponiendo instrumentos unívocos para la enseñanza. Se trataba de dos verdaderos matemáticos, el primero con un doctorado en Londres, el segundo en Bruselas, no aficionados improvisados; tuve la ocasión de conocerlos personalmente y de frecuentarlos de forma privada.
Los estudios analíticos y críticos de Guy Brousseau, el creador de la moderna didáctica de la matemática, demolió en los años ’80 los trabajos de Dienes, mostrando en forma absolutamente evidente un “efecto Dienes” que él mismo Dienes reconoció públicamente (en Forli, el 8 de mayo de 1993, en mi presencia). Mientras, la crítica demoledora a los instrumentos ideados por Papy se presentó dentro del mismo grupo que él había creado (el GIRP, *Groupe International de Recherche en Pédagogie de la Mathématique*, con sede a Walferdanche, Luxemburgo, del cual fui presidente durante tres años).
Hoy nadie habla de estos métodos, sin embargo ilusionaron al mundo, en el interior de aquella trampa que se llamó “nueva matemática” o “matemática moderna”.
No es posible estar en contra de un instrumento o de un método por principio, es más, ¡ojalá el docente tuviera a disposición una gran cantidad de instrumentos! A lo que nos debemos oponer no es al instrumento o al método, el error es la elección unívoca o el delegar al instrumento (en singular) o al método (en singular) un poder taumatúrgico – didáctico que no puede tener, porque este es responsabilidad del docente, del maestro, del ser humano que enseña y no de un instrumento o de un método. El muy delicado y muy complicado proceso de enseñanza – aprendizaje está conectado con los aspectos relacionales que ponen un enlace con los tres elementos de la situación de aula: docente, alumno y Saber (matemático)
Los números en color (las regletas) de Cuisenaire-Gattegno, los bloques multibase de Dienes, las flechas de Papy, la recta numérica, los bloques lógicos de Dienes, los ábacos, el ábaco japonés (el sorobán), las calculadoras, el tablero digital, todos los softwares didácticos, son todos bienvenidos, cuanto mayor números de instrumentos didácticos haya, mayor es la posibilidad de elección por parte del docente. Cuantas más estrategias didácticas conozca mejor, así podrá aplicar diversas.

Lo que es ridículo, anti-didáctico, erróneo es creer que sea posible una elección unívoca, que en un único de estos (o de otros análogos) se esconde la receta, la magia, la panacea.
Es necesario usar, saber usar, cada instrumento, cada metodología, y al mismo tiempo desconfiar, conocer sus límites, porque estos límites existen siempre, en todo instrumento.
Las revelaciones místicas mágicas de los creadores de teorías didácticas infalibles pertenecen a la categoría de las creencias que, en el punto f, denominé "campos de creencias". Son mucho más cercanas a la astrología que a la ciencia o a la didáctica aunque sólo si esta didáctica es entendida como ciencia empírica.

Un ejemplo de análisis de situaciones de aula

Guy Brousseau y yo estudiamos hace algunos años algunos ejemplos y denunciamos por escrito el fenómeno del "resbalón meta-didáctico". Estos fenómenos aparecen después de una derrota, de un fracaso, generalmente inevitable; pero el hecho no es reconocido inmediatamente como tal en la didáctica ingenua.
Los docentes explican, después explican las explicaciones, las ilustran y después explican las ilustraciones… Cada vez los intentos de corregir el fracaso inicial del aprendizaje se revelan inapropiados. El fenómeno se amplifica y se vuelve rápidamente incontrolable. Y así, como en las grandes pandemias del Medioevo, algunos aprovechan para acusar a toda práctica escolar que ellos pretenden renovar, mutilándolas, para poner al rojo cualquier "teoría" y para olvidar los resultados de las experiencias consideradas nefastas
Pongamos un ejemplo concreto. A finales de los años '50, la reorganización de los conocimientos matemáticos estaba concluyendo un centenar de años de descubrimientos notables. La sociedad, los centros culturales y la enseñanza reconocieron la necesidad de adaptarse. Pero la mayor dificultad estaba en la introducción de los fundamentos: ¿cómo domesticar la axiomática en un proceso de enseñanza acostumbrado asociar unos objetos a sus lenguajes? Todos los aspectos de la matemática tienen necesidad de la lógica bajo una forma apropiada. Se propuso entonces usar una teoría ingenua de conjuntos como sustituto de la lógica clásica y de sustituir la matemática en la escuela por dicha teoría.
Se trató de un primer resbalón didáctico: el instrumento se convirtió él mismo en el objeto de estudio.
Para usar con mayor facilidad la lógica, se le sustituye por una especie de descripción o de modelo. En realidad se simplifica mucho: basta dar unas reglas de uso. Se piensa en la teoría de conjuntos, pero en realidad se introducen gráficos, el lenguaje mismo de los conjuntos se vuelve algo un poco más "concreto" simulando una idea de Leonhard Euler quien usaba

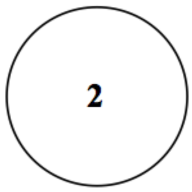
círculos para ilustrar, enumerar y clasificar los silogismos para una alumna suya perteneciente a la nobleza alemana. Para la época parecía que esta idea habría permitido hacer la enseñanza de la lógica de Aristóteles algo mucho más fácil junto con la enseñanza del fundamento del lenguaje matemático, incluso con niños muy jóvenes, de esta forma los términos usados serían los mismos, desde el preescolar hasta la universidad.

Se trata de un segundo resbalón didáctico: del estudio de la lógica se pasa al estudio del instrumento gráfico cuando en realidad este sólo debería constituir un medio de representación.

Pero esta vez la "representación" es sólo una metáfora: los conjuntos no tienen fronteras, mientras que el dibujo sí; la unión de partes no son visibles como "conjuntos" etc. Sin embargo, también en la enseñanza es necesario conjugar nociones bastante bien definidas con otras que no son más que aproximaciones "trasladadas": las reglas del juego son diversas, en particular en los niveles inferiores en los cuales se requieren reglas de uso bien *expresables* y *consistentes*.

El lenguaje coloquial puesto en acción para la descripción de la metáfora de los círculos de Euler constituye un *nuevo resbalón meta*: de estudiar el instrumento gráfico se pasó al lenguaje común que lo describe.

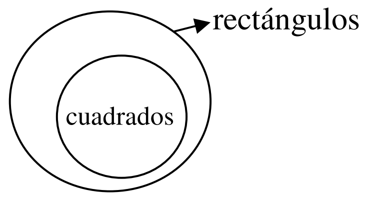
George Papy propuso entonces colorear las fronteras de dichos círculos para identificar las componentes conexas de un mismo conjunto. Pero la materialización de los elementos a través de puntos hace evidente nuevas contradicciones.



No se sabe si el signo 2, representado en el círculo, es su único elemento, o si es una especie de variable numérica, un elemento identificado a título de ejemplo que evoca otros, por ejemplo todos los pares, no representados, o si el elemento es el mismo signo "2".

Se requiere un vocabulario específico para describir estas figuras. En francés, bajo la influencia de George Papy, se llamaron en un primer momento "papas" y después "papygramas"; en italiano no tuvieron una denominación específica en las aulas, sólo "diagramas de conjuntos" o "diagrama de Euler – Venn" y la disciplina relativa se llamó "insiemistica" (en español puede traducirse como "conjuntivistica"). Este nuevo vocabulario se puede considerar como el elemento fundamental de este último y definitivo resbalón: la matemática

inicial se perdió, no hay claridad sobre lo que se está enseñando ni de lo que se está pidiendo de aprender.
Si se quiere aceptar la metáfora de la teoría ingenua de conjuntos, para evitar de un sólo golpe los resbalones sucesivos, se deberían haber restringido los dibujos a un papel puramente ilustrativo, de medio de expresión sin codificarlos ni enseñando los reglas gráficas y lingüísticas relativas. Estos hubieran formado un conjunto de conocimientos implícitos para representar lo que se está diciendo, para convencerse, y que puede ser utilizado; pero sin la necesidad de un estatuto de saberes significativo, comprobante, por tanto sin gramática y sin teoría. Lo que llamamos conocimiento, pero no un saber.
En otras palabras, se puede usar un gráfico como el siguiente:



para ilustrar que "Todos los cuadrados son rectángulo, pero hay rectángulos que no son cuadrados", sin tener que tratar específicamente una teoría de los conjuntos que incluya: conjuntos, propiedades, elementos, pertenencia, conjunto vacío, conjunto universal, inclusión, intersección, unión, subconjuntos, inclusión, producto cartesiano, correspondencia biunívoca, relación reflexiva, simétrica y transitiva, pasaje al cociente, partición etcétera, todo inútilmente sobredimensionado para llegar a un banal uso de algunos gráficos que ya son del todo comprensibles.
Los resbalones meta-didácticos pueden producirse a propósito de cualquier noción matemática, pero también de acciones matemáticas.
Por ejemplo, consideremos la pseudo-enseñanza de los métodos de *problem solving*.
La dificultad que encuentran los alumnos en la resolución de problemas deja por lo general al docente desarmado. El alumno sabe "sus" saberes, "sus" teoremas (en ocasiones sólo "en acto") y sin embargo él no encuentra el medio para usarlos en la resolución de los problemas que le son propuestos. Una respuesta clásica a nivel primario consiste en presentar al estudiante que no tuvo éxito problemas análogos de forma tal que el alumno pueda reproducir la solución que se le enseñó en un caso similar, entendiendo la similitud pero no el sentido de la resolución.
Él no tiene necesidad de saber si su respuesta es adecuada, ni el por qué de esta repuesta; basta que dicha respuesta sea conforme con el modelo esperado por el docente. Él puede así responder en el ámbito de un contrato didáctico

sin entender por qué su solución es correcta. Cualquier cosa que digan en relación a este propósito las diversas teorías del conocimiento y del aprendizaje que se fundan en el “reconocimiento” del saber y sobre su citación, el estudiante simula una resolución que puede no estar comprendiendo.

En un recorrido más concreto, para guiar a los alumnos, George Polya se deja llevar por consejos neo-cartesianos para la organización del trabajo de resolución de los problemas, asumiéndose así mismo como paradigma: comprender el enunciado, conectarlo con conocimientos previos, descomponerlo en etapas,… Él sugiere así intentar pasos heurísticos: buscar similitudes, un ejemplo, un contraejemplo, generalizar, comparar… Este trabajo, que tenía como objetivo ser puramente descriptivo, fue tomado como base de un fallido e ingenuo intento de enseñanza de la resolución de problemas fundado en el uso de estas heurísticas.

Se trata claramente de un resbalón meta-didáctico: la resolución de problemas se vio sustituida por un estudio del proceso de tal resolución. Es probable que los ejemplos dados sean de tal naturaleza que pueden tranquilizar y volver aguerridos a los estudiantes, pero es claro que la situación resbaló sin cambiar de naturaleza: el alumno busca aplicar sus heurísticas así como buscaba aplicar sus conocimientos y sus teoremas y el éxito no está de hecho asegurado, a menos que se elijan problemas ad hoc. ¿Se hace necesario, entonces, buscar heurísticas de segundo orden?

Incluso si el proceso no es recursivo, el engaño es fatal. La única diferencia es que los teoremas son saberes matemáticos que contienen sus mismas condiciones de validez, lo cual no es el caso de las heurísticas que son sólo conocimientos. El tratar estas heurísticas como saberes es un error epistemológico y didáctico.

Aún más mortal es el sueño, persecución acrítica de este resbalón meta-didáctico, de transformar la resolución de problemas en algoritmos. Encontramos dos tipos:

1. En la resolución de un problema hay que construir el diagrama de flujo que lo explica. Esta elección no adecuada llevó a estudiar los diagramas de bloqueos y de flujo como si estos fuesen el objeto de aprendizaje. Esto es un resbalón meta-didáctico.

2. Sistemas normativos de efecto nulo o negativo: “Encierra con rojo los datos numéricos del texto del problema; subraya con color verde la pregunta; busca la palabra clave que te permitirá reconocer la operación que debes usar para resolver el problema…”. Todas estas son condiciones para un resbalón meta-didáctico que transforman la resolución de problemas en banalidades que no ayudan en nada al proceso de resolución; tomemos como ejemplo mi problema de 1992: “Un pastor tiene 12 ovejas y 6 cabras. ¿Cuántos años tiene el pastor?”; si encerramos en rojo los datos 12 y 6; si se subraya en verde la pregunta: ¿Cuántos años tiene el pastor?; si se busca la palabrita clave que te

ayuda a decidir la operación… Ya pero ¿Cuál?: ¿"Cuántos"?, ¿"Es"? Quien intenta resolver este problema siguiendo estas "reglas" está condenado a proporcionar la respuesta 18 que caracteriza la gran mayoría de las respuestas a este problema cuando es formulado de forma oral. El estudiante no lee críticamente el problema para dar un respuesta razonable, viene aturdido por el resbalón meta-didáctico impuesto, efectúa pasos sugeridos y después olvida la lógica del texto y lanza propuestas numéricas que le parecen adecuadas, de hecho aquellas obligadas por el procedimiento demencial sugerido.

El *resbalón meta-didáctico* consiste, para el docente, en cambiar el objeto de su enseñanza ya sea de una actividad o de una noción, hacia uno de sus medios de control. Por ejemplo, el docente de idiomas sustituye la corrección del error de sus alumnos con la enseñanza del enunciado de la regla de gramática que no fue respetada. Esta acción es perfectamente legítima, en principio; pero la percepción que el estudiante se forma de esta actitud del docente es como un alejamiento de la circunstancia específica, una generalización de su error concreto.

Todo esto puede en ocasiones constituir un desvío dañino de la actividad; los personajes involucrados en el proceso de enseñanza – aprendizaje, docente y alumno, pierden de vista (los dos) su proyecto y se extravíen. Por ejemplo:

- en el estudio de la proporcionalidad, se estudia la regla (llamada "la regla del tres") que se debe seguir para responder a una pregunta sobre la proporción;
- para entender la lógica de los enunciados, se aprenden de memoria las tablas de verdad semánticas de los conectivos;
- en vez de entender las condiciones internas intrínsecas de un sistema de dos ecuaciones lineales, se estudian los métodos de solución, por ejemplo el método de Cramer);
- para el estudio de qué es una superficie, se dan reglas para calcular el área de un cuadrilátero;
- en vez de estudiar y aprender el teorema de Ruffini, se aprende la regla de Ruffini;
- la pruebas nacionales e internacionales, de control de los resultados del aprendizaje, pasan primero a ser objetivos de enseñanza, después medios de enseñanza y por último objeto mismo de enseñanza; estas tienden a transformar nuestras concepciones de conocimiento y de aprendizaje en una especie de ejercitación;

etcétera.

Se trata siempre evidentemente de resbalones meta-didácticos, extremadamente potentes y peligrosos.

Referencias bibliográficas

"Piensen ahora mis 25 lectores" (¿25?; ¡ojalá, querido Alessandro!)[2] lo aburrido que sería si yo intentara tan sólo hacer una lista de aquellos textos a los cuales he hecho referencia implícita…

Me disculpo por esta voluntaria omisión. Pero esta es una ocasión de fiesta.

De otra parte mis alumnos más devotos sabrán a qué trabajos escritos he hecho referencia.

[Traduzione di Martha Isabel Fandiño Pinilla e di Salvador Llinares]

[2] Alessandro Manzoni (1785 – 1873) es uno de los más grandes escritores italianos, poeta y autor de textos teatrales. Su novela *I promesi sposi (Los novios)* (I edición: 1827; 40ª edición: 1841) es uno de los grandes clásicos de la lengua italiana, al cual sobre todo pertenece el mérito de haber contribuido a la unificación de la lengua italiana en un período en el cual los diversos dialectos y las lenguas regionales hacían imposible la comunicación en aquella tierra que después sería conocida como el Reino de Italia (de 1861 a 1946). En el Capítulo I de la novela, el Autor se dirige irónicamente al destinatario de su magnífica obra con la célebre frase "mis veinticinco lectores", de forma modesta; en realidad el libro tuvo un gran éxito inmediatamente. La novela fue traducida en 21 idiomas, de esta se han adaptado operas, películas, musicales, parodias, comics,… [N.d.T.]